

Roll No. ....

Total Printed Pages - 6

**F-3768****B.Sc. (Part - III) EXAMINATION, 2022****(Old/New Course)****MATHEMATICS****Paper First****(Analysis)***Time : Three Hours]**[Maximum Marks:50*

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Attempt any two parts of each question. All questions carry equal marks.

**इकाई -1 / Unit - 1**

1. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक निरपेक्षतः अभिसारी द्विक श्रेणी अभिसारी होता है।

Every absolutely convergent double series is also convergent.

P.T.O.

- (ब) फलन  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  के लिए श्वार्ज

प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

Verify the Schwarz's theorem for the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{when } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{when } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (स) अंतराल  $(-\pi, \pi)$  में फलन  $f(x) = x \sin x$  की फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए एवं निगमन कीजिए कि-

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} \dots\dots\dots$$

Obtain Fourier series of the function  $f(x) = x \sin x$  in the interval  $(-\pi, \pi)$  Hence deduce that-

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} \dots\dots\dots$$

**इकाई -2 / Unit - 2**

2. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संतत फलन रीमान् समाकलनीय होता है।

F- 3768

[3]

Prove that every continuous function is Riemann integrable.

(ब) फलन  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$  की अयिसारिता का परीक्षण कीजिए।

To test the convergency of the function  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ .

(स) यदि  $|\infty| < 1$ , तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^\pi \frac{\log(1+\infty \cos x)}{\cos x} dx = \pi \sin^{-1} \infty$$

If  $|\infty| < 1$ , then prove that

$$\int_0^\pi \frac{\log(1+\infty \cos x)}{\cos x} dx = \pi \sin^{-1} \infty$$

### इकाई -3 / Unit - 3

3. (अ) दिखाइये कि फलन  $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$  हारमोनिक है एवं इसका हारमोनिक संयुग्मी ज्ञात कीजिये।

Show that  $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$  is harmonic and find its harmonic conjugate.

F- 3768

P.T.O.

[4]

(ब) दिये गये द्विरैखिक रूपांतरण

$$(i) w = \frac{3z-4}{z-1}$$

(ii)  $w = \frac{3iz+1}{z+i}$  का स्थिर बिन्दु एवं प्रसामान्य रूप ज्ञात कीजिए।

Find the fixed points and the normal form of the bilinear transformation.

$$(i) w = \frac{3z-4}{z-1}$$

$$(ii) w = \frac{3iz+1}{z+i}$$

(स) दिखाइए कि रूपांतरण

$$(w+1)^2 = \frac{4}{z}$$

परवलय  $y^2 = 4(1-x)$  के बाहरी क्षेत्र को  $w$ - सतह में इकाई वृत्त के आंतरिक भाग पर रूपांतरित करता है।

Show that the transformation:

$$(w+1)^2 = \frac{4}{z}$$

Transform the region outside the parabola  $y^2 = 4(1-x)$  into the interior of the unit circle in  $w$ - plane.

F- 3768

[5]

**इकाई -4 / Unit - 4**

4. (अ) दूरीक समष्टि को परिभाषित कर सिद्ध कीजिए कि

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y, z \in X$$

Define metric space and in a metric space  $(X, d)$  prove that-

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y, z \in X$$

- (ब) बनावक नियत बिन्दु प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Banach Fixed point theorem.

- (स) दिखाइये कि  $\sqrt{8}$  परिमेय संख्या नहीं है।

Show that  $\sqrt{8}$  is not a rational number.

**इकाई -5 / Unit - 5**

5. (अ) बेयर केटेगरी प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Baire category theorem.

- (ब) दिखाइये कि प्रत्येक कांपैक्ट(compact) दूरीक समष्टि बोलजानो वाइरस्ट्रास के प्रगुण को रखता है।

[6]

Every compact metric space has the Bolzano-weierstrass property.

- (स) सिद्ध कीजिए कि  $\mathbb{R}$  का उपसमुच्चय  $A$  संयुक्त होता है यदि और केवल यदि यह एक अंतराल हो।

Prove that a subset  $A$  of  $\mathbb{R}$  is connected if and only if it is an interval.